



تمارين

## حركة الأقمار الاصطناعية والكواكب خاص بالعلوم الرياضية والعلوم التجريبية مسلك العلوم الفيزيائية

### I \_ القوانين الثلاثة لكيبلر Kepler

#### 1 \_ المرجع المركزي الشمسي

المرجع الغاليلي الملائم لدراسة حركة الكواكب حول الشمس هو المرجع المركزي الشمسي .

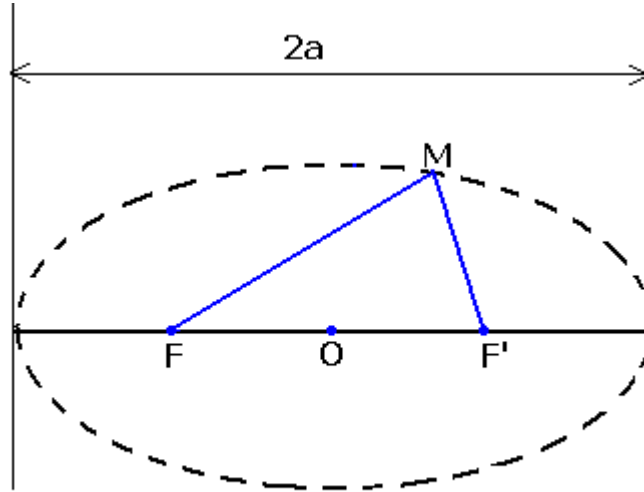
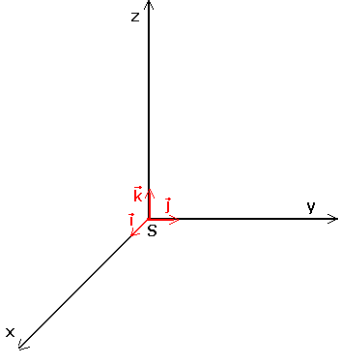
لدراسة حركة الكواكب حول الشمس نربط معلم متعامد وممنظم  $(S, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  بالمرجع المركزي الشمسي حيث مركزه الشمس ومحاوره الثلاثة موجهة نحو ثلاثة نجوم بعيدة جدا نعتبرها ثابتة .

#### 2 \_ قوانين كيبلر :

أ \_ القانون الأول أو قانون المدارات الإهليلجية .

يحدد هذا القانون بدقة طبيعة مسارات مراكز قصور الكواكب .

نص القانون : مسار مركز قصور كوكب ، في المرجع المركزي الأرضي ، إهليلج يشكل مركز الشمس إحدى بؤرتيه .



$$MF + MF' = 2a$$

الإهليلج منحنى مستو ، حيث يكون مجموع المسافتين اللتين تفصلان نقطة ما من هذا المنحنى ، تباعا ، بنقطتين ثابتتين ، مجموعا ثابتا . تشكل النقطتان F و F' بؤرتي الإهليلج .

لتكن النقطة M من الإهليلج لدينا :  $MF + MF' = Cte = 2a$

a نصف طول المحور الكبير للإهليلج .

مثال : مدار الأرض حول الشمس هو عبارة عن إهليلج ، يسمى فلك البروج 'élliptique' بحيث ينتمي مركز الشمس إلى مستوى هذا المدار .

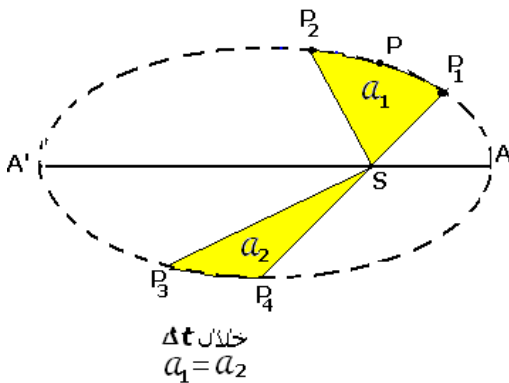
#### ب \_ القانون الثاني أو قانون المساحات .

نعتبر كوكبا مركز قصوره P في حركة حول الشمس . خلال المدة الزمنية  $\Delta t = t_2 - t_1$  ينتقل P من الموضع  $P_1$  إلى الموضع  $P_2$  . أي

أن خلال هذا الانتقال تم كسح مساحة  $A_1$  وهي المحصورة بين

$[SP_1]$  و  $[SP_2]$  والمقطع  $P_1P_2$  لمسار P .

خلال نفس المدة الزمنية  $\Delta t = t_4 - t_3$  ينتقل P من  $P_3$  إلى  $P_4$



$$\Delta t \text{ خلال } A_1 = A_2$$



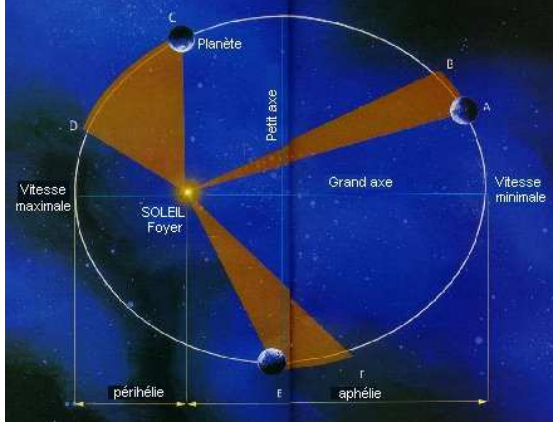
تمارين



أي أنه خلال هذا الانتقال تم كسح المساحة  $a_2$  حيث  $a_1 = a_2$

## نص القانون : تكسح القطعة $[SP]$ التي تربط مركز الشمس بمركز الكوكب مساحات

متقايسة في مدد زمنية متساوية .



يترجم هذا القانون ملاحظة كيبلر والتي تؤكد أن الكواكب تدور حول الشمس بسرعة غير ثابتة ؛ أي أن الكوكب كلما اقترب من الشمس زادت سرعته والعكس صحيح .

تكون سرعة الكوكب قصوى عندما يتواجد مركز قصوره بالنقطة A الأقرب من مركز الشمس ؛

وتكون سرعة الكوكب دنيا عندما يتواجد مركز قصوره بالنقطة A' الأبعد من مركز الشمس .

## ج - القانون الثالث أو قانون الأدوار ؛

الدورة الفلكية : هي حركة كوكب ما بين مرورين متتاليين لمركزه P من نفس النقطة من مداره حول الشمس .

الدور المداري T للكوكب هو المدة الزمنية التي يستغرقها مرزه لإنجاز دورة فلكية كاملة .

## نص القانون : يتناسب مربع الدور المداري اطرادا مع مكعب نصف طول المحور الكبير للإهليلج .

ونعبر عن هذا النص بالعلاقة التالية :  $\frac{T^2}{a^3} = k$

حيث أن T الدور المداري ب (s)

a نصف طول المحور الكبير للإهليلج بالمتر (m) ؛

K ثابتة لا تتعلق بالكوكب ، وحدتها  $m^2 / s^3$

قيمة k هي نفسها بالنسبة لجميع كواكب النظام الشمسي .

**ملحوظات :** بالنسبة للكواكب التي يمكن اعتبار أن مداراتها دائرية شعاعها r

يكتب القانون الثالث لكيبلر :  $\frac{T^2}{r^3} = k$

نطبق قانون كيبلر أيضا على الأقمار الاصطناعية التي تدور حول كوكب ما . في هذه الحالة يشكل مركز

الكوكب إحدى بؤرتي الإهليلج ، كما أنه بالنسبة لخارج القسمة  $k' = \frac{T^2}{a^3}$  هو نفسه بالنسبة لجميع

الأقمار التي تدور حول نفس الكوكب . تتعلق قيمة k' بكتلة الكوكب .

## II - الحركة الدائرية المنتظمة

سنقتصر في دراسة حركة الأقمار والكواكب على حالة واحدة حيث يكون المدار دائريا . حيث ينتج عن

تطبيق قوانين كيبلر الخاصيات لتالية :

- مدار الكوكب دائري مركزه الشمس

- سرعة P مركز الكوكب ثابتة أي أن الحركة دائرية منتظمة

- قانون الأدوار يصبح هو :  $\frac{T^2}{r^3} = k$  ، r هو شعاع المسار الدائري .

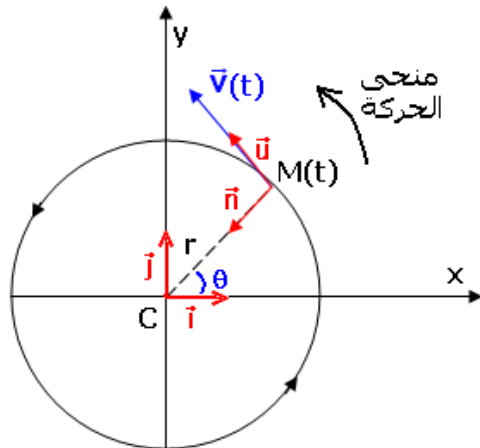
## 1 - خاصيات الحركة الدائرية المنتظمة

أ - تعريف

تكون حركة نقطة دائرية منتظمة إذا كان مسار هذه النقطة دائريا وإذا كانت قيمة سرعتها ثابتة .

ب - متجهة السرعة

نعتبر نقطة M في حركة دائرية منتظمة في معلم معين . مسار M





دائري مركزه C ، وشعاعه r ، موجه موجبا في منحنى الحركة . نعلم موضع M في المستوى  $(C, \vec{i}, \vec{j})$  بالزاوية  $\theta$  هو الأفصول الزاوي .

خاصية حركة دائرية منتظمة :

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = cte$$

متجهة السرعة  $\vec{v}$  مماسة للمسار الدائري ، ومنحائها هو منحنى الحركة :  $\vec{v} = r \cdot \omega \vec{u}$  ؛  $\vec{u}$  متجهة واحدة مماسة للمسار.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v}$$

وحدة الفصول الزاوي هي الراديان rad ووحدة السرعة الزاوية  $\omega$  هي  $rad/s$

### ج - متجهة التسارع

في الحركة الدائرية المنتظمة يتغير اتجاه متجهة السرعة ، باعتبار

أساس فريني فإن  $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u} + \frac{v^2}{r} \vec{n}$  ونعلم أنه بالنسبة للحركة الدائرية

$$\vec{a} = \frac{v^2}{r} \vec{n} \quad \text{أن } v = cte \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0$$

وبالتالي فإن متجهة التسارع غير منعدمة ومحمولة من طرف المتجهة المنظمة  $\vec{n}$  أي موجه نحو مركز الدائرة .

**بالنسبة لحركة دائرية منتظمة ، متجهة التسارع مركزية انجاذبية ، تعبيرها هو :**

$$\vec{a} = \frac{v^2}{r} \vec{n} \quad \text{وبما أن } v = r \cdot \omega \quad \text{فإن } \vec{a} = r \omega^2 \vec{n}$$

$\omega$  السرعة الزاوية نعبّر عنها ب  $rad/s$  و شعاع المسار الدائري ونعبّر عنه بالمتر ،  $v$

قيمة السرعة ونعبّر عنها ب  $m/s$  و قيمة التسارع ونعبّر عنها ب  $m/s^2$  و  $\vec{n}$  المتجهة

الواحدة المنظمة موجهة نحو المركز C .

2 - الشرطان الأساسيان للحصول على حركة دائرية منتظمة .

نعتبر جسما صلبا كتلته m ، وحركة مركز قصوره دائرية منتظمة في معلم غاليلي .

نطبق القانون الثاني لنيوتن على حركة هذا الجسم :  $\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}_G$

بحيث أن  $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}$  مجموع القوى المطبقة على الجسم الصلب .

للحصول على حركة دائرية منتظمة يجب أن تكون متجهة التسارع  $\vec{a}_G$

لمركز قصور الجسم انجاذبية مركزية منظمها ثابت ومنظمها يساوي :

**$a = \frac{v^2}{r}$  وبالتالي يجب أن تكون  $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}$  كذلك مركزية انجاذبية**

$$\text{ومنظمها } F = \frac{mv^2}{r}$$

### III - قانون نيوتن للتجاذب الكوني

نص القانون :

يحدث بين جسمين نقطيين (A) و (B) كتلتهما  $m_A$  و  $m_B$  ، وتفصل بينهما مسافة AB ،

تجاذب كوني قوتهما هما  $\vec{F}_{A/B}$  و  $\vec{F}_{B/A}$  بحيث أن :

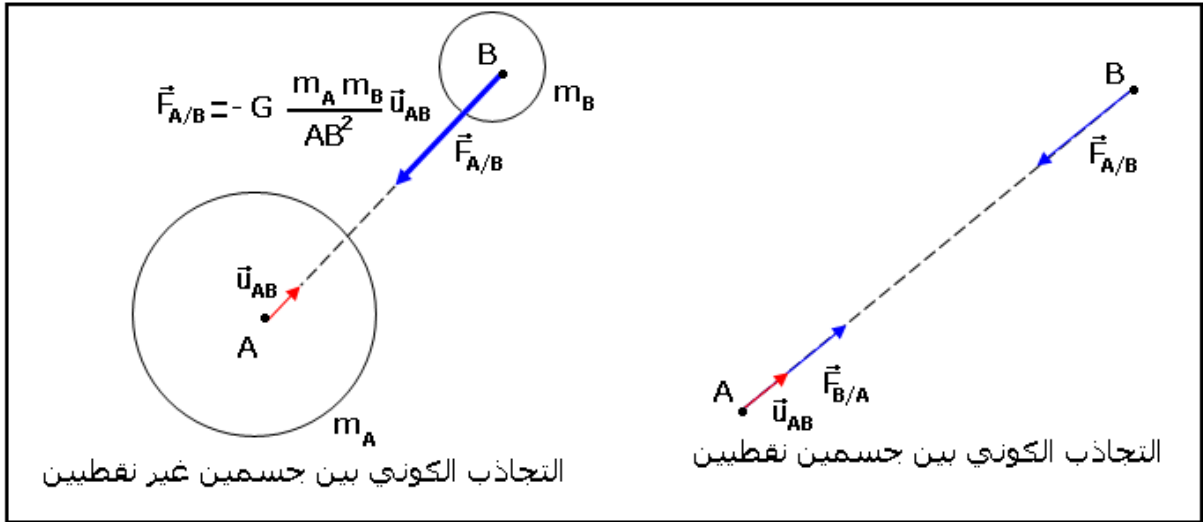


$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A} = -\frac{G \cdot m_A \cdot m_B}{AB^2} \vec{u}_{AB}$$

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$  : ثابتة التجاذب الكوني :

$\vec{u}_{AB}$  متجهة واحدة موجهة من A نحو B .

- يطبق هذا القانون كذلك على الأجسام غير نقطية في الحالتين التاليتين :
- أجسام ذات تماثل كروي لتوزيع الكتلة .
  - أجسام لها أبعاد مهملة أمام المسافة الفاصلة بينهما .

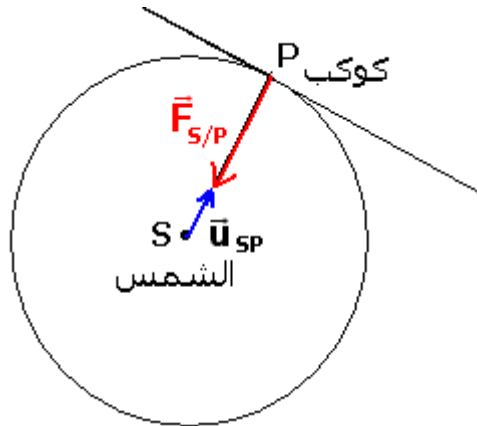


#### IV - الحركة المدارية للكواكب

نختار كمرجع لدراسة حركة كوكب حول الشمس المرجع المركزي الشمسي . ونبين أن حركة هذا الكوكب حول الشمس حركة منتظمة ونحدد مميزات هذه الحركة .

##### 1 - تطبيق القانون الثاني لنيوتن :

نعتبر كوكبا كتلته  $m$  ومركزه  $P$  الذي يتطابق مع مركز قصوره في حركة حول الشمس ذات كتلة  $m_s$  ومركزها  $S$  .



$$\vec{F}_{S/P} = -G \frac{m \cdot m_s}{r^2} \vec{u}_{SP} \text{ : يخضع الكوكب إلى قوة التجاذب الكوني}$$

$$\vec{F}_{S/P} = -G \frac{m \cdot m_s}{r^2} \vec{u}_{SP} = m \cdot \vec{a}_p \Rightarrow \vec{a}_p = -G \frac{m_s}{r^2} \vec{u}_{SP} \text{ : وحسب القانون الثاني لنيوتن لدينا}$$



يلاحظ من خلال العلاقة أن  $\vec{a}_p$  و  $\vec{u}_{sp}$  لهما نفس الاتجاه يعني أن التسارع انجذابي مركزي وبالتالي فإن

حركة الكوكب P حركة دائرية منتظمة .

وبما أن قوة التجاذب الكوني قوة انجذابية مركزية فإن :

$$\vec{F}_{S/P} = -m \cdot \frac{v^2}{r} \vec{u}_{sp} \Rightarrow \frac{v^2}{r} = G \frac{m_S}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot m_S}{r}}$$

في مرجع مركزي أرضي تكون حركة كوكب حول الشمس دائرية منتظمة ، ومسار مركزه دائرة شعاعها

$$r ، بشرط أن تحقق سرعته العلاقة :  $v = \sqrt{\frac{G \cdot m_S}{r}}$$$

## 2 - تعبير الدور المداري T ؛

الدور المداري T هو المدة الزمنية التي يستغرقها الكوكب لإنجاز دورة كاملة حول الشمس بسرعة v .

$$\text{لدينا } T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot m_S}} \text{ من هذه العلاقة نحصل على القانون الثالث لكيبلر : } \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot m_S}$$

وبالتالي  $\frac{T^2}{r^3}$  لا تتعلق بكتلة الكوكب المدروس .

## 7 - الحركة المدارية للأقمار الاصطناعية للأرض .

لدراسة أقمار الأرض نختار كجسم مرجعي المداري المركزي الأرضي

نسمي قمرا كل جسم في حركة مدارية حول كوكب .

مثال : يشكل القمر (la lune) قمرا طبيعيا للأرض .

### 1 - تعبير السرعة والدور المداري .

تكون حركة قمر اصطناعي حول الأرض حركة دائرية منتظمة عندما يتحقق الشرطان :

– القوة المطبقة من طرف الأرض T ذات الكتلة  $m_T$  والشعاع  $r_T$

على القمر الاصطناعي S ( $\vec{F}_{T/S}$ ) انجذابية مركزية .

– منظمها  $F_{T/S}$  ثابت ، ويحقق العلاقة  $F_{T/S} = \frac{mv^2}{r}$  أي أن

$$\text{التسارع } a = \frac{v^2}{r}$$

ويتطبيق القانون الثاني لنيوتن : يوجد القمر الاصطناعي تحت تأثير

القوة ( $\vec{F}_{T/S}$ ) القوة المطبقة من طرف الأرض على القمر

الاصطناعي :

$$\vec{F}_{T/S} = -G \frac{m_T \cdot m_S}{r^2} \vec{u}_{TS} = -\frac{m_S v^2}{r} \vec{u}_{TS}$$

$$v^2 = \frac{G m_T}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G m_T}{r}}$$

بحيث أن  $r = r_T + z$  و  $z$  هو ارتفاع القمر اصطناعي بالنسبة للأرض و  $r_T$  شعاع الأرض .

$$\text{الدور المداري T لحركة القمر الاصطناعي هو : } T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot m_T}} = 2\pi \sqrt{\frac{(r_T + z)^3}{G \cdot m_T}}$$

ملحوظة : لاتتعلق v سرعة دوران القمر الاصطناعي والدور المداري T بكتلة القمر الاصطناعي بل

تتعلق بارتفاعه z بالنسبة لسطح الأرض .

## 2 - الاستعمار satellisation

**تعريف :**

الاستقمار هو وضع قمر اصطناعي في مداره حول الأرض وإعطاؤه سرعة كافية تخول له حركة دائرية منتظمة حول الأرض .

تتم هذه العملية بواسطة مركبة فضائية والتي تقوم بدور مزدوج :

– حمل القمر الاصطناعي إلى ارتفاع يفوق حوالي 200km حيث الغلاف الجوي الأرضي تقريبا منعدم .

– منح القمر الاصطناعي سرعة تجعله يبقى في مدار دائري حول الأرض بحيث تكون متجهة السرعة

البدئية عمودية على متجهة الموضع  $\vec{TS}$  ومنظمها يحقق

$$v = \sqrt{\frac{G.m_T}{(r_T + z)}} : \text{العلاقة}$$

نعتبر أن القمر الاصطناعي خاضعا لقوة التجاذب الأرضي فقط ونهمل الاحتكاكات المتعلقة بالجو .

**3 – الأقمار الاصطناعية الساكنة بالنسبة للأرض .**

يكون القمر الاصطناعي ساكنا بالنسبة للأرض إذا بدا دوما غير متحرك بالنسبة لملاحظ على سطح الأرض .

الشروط لكي يكون القمر الاصطناعي ساكنا بالنسبة للأرض :

في المرجع المركزي الأرضي ، تدور الأرض حول محورها

القطبي ، ويساوي الدور T لهذا الدوران الخاص يوما فلكيا ( 24 ساعة )

لكي يظهر القمر الاصطناعي ساكنا بالنسبة للأرض يجب :

– أن يدور في منحنى دوران الأرض حول محور قطبيها .

– يساوي دوره المداري T دور حركة الدوران الخاصة للأرض حول محورها القطبي .

– يوجد مداره الدائري في مستوى خط الاستواء للأرض .

تمكن قيمة T من تحديد قيمة z ، أي أن  $T = 23h56min = 84164s$  أي أن الارتفاع z عن سطح الأرض

$$T = \sqrt{\frac{(r+z)^3}{G.m_T}} \Rightarrow z = \left( \frac{T^2 \cdot G.m_T}{4\pi^2} \right)^{1/3} - r_T \quad \text{هو :}$$

تطبيق عددي :

$$z \approx 36000km$$