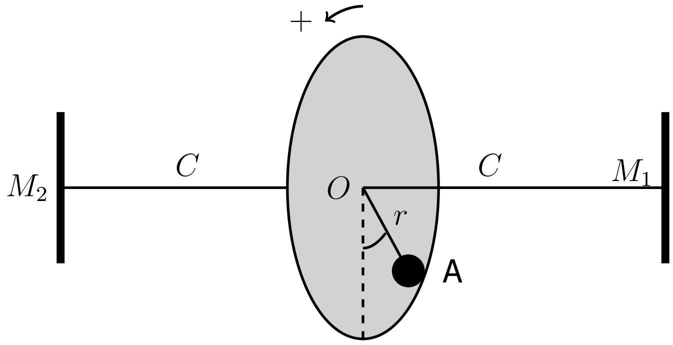
تمارين في المتذبذبات الميكانيكية

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ $g = 10m/s^2$ و $\pi^2 = 10$

نأخذ بكرة $(\mathscr{P})$ عزم فصورها بالنسبة للمحور الدوران (Δ) المار من مركز قصورها O هو $J_0 = 10^{-3}kg.m^2$.



نثبت في مركزها O طرفي سلكي لي مماثلين و أفقيين ، كتلتاهما مهملتان ، ولهما نفس ثابتة اللي C . الطرفان الأخران للسلكين مثبتان بحاملين في النقطتين M_1 و M_2 . نثبت في نقطة من محيط البكرة وعلى المسافة $r = 6cm$ من O جسما صلبا A كتلته $m = 40g$ نعتبره نقطيا .
عزم قصور المجموعة البكرة والجسم A بالنسبة للحور Δ الذي يجسده السلكان هو : $J_\Delta = J_0 + mr^2$

عند التوازن يكون السلكان غير ملتويين ويجد الجسم A على الخط الرأسي المار من O .
انطلاقا من موضع التوازن ندير البكرة بالزاوية $\theta_m = \pi/18rad$ في المنحى الموجب ، ثم نحررها بدون سرعة بدئية في اللحظة $t = 0$. نمعلم موضع A عند اللحظة t ، بالأفصول الزاوي θ الذي يكونه OA مع الخط الرأسي المار من O (أنظر الشكل) . نعتبر المجموعة S المكونة من البكرة ـ الجسم ـ سلكا اللي .

1 ـ اعتمادا على الدراسة الطاقية أوجد المعادلة التفاضلية لحركة البكرة والجسم A في حالة التذبذبات الصغيرة . نختار المستوى الأفقي الذي تنتمي إليه النقطة O مرجعا لطاقة الوضع الثقالية والحالة التي يكون فيها السلكان غير ملتويين مرجعا لطاقة وضع اللي .

2 ـ حدد ثابتة اللي C علما أن المدة الزمنية التي تستغرقها 10 تذبذبات هي $\Delta t = 8s$.

3 ـ أكتب المعادلة الزمنية للحركة .

4 ـ بين أن الطاقة الحركية للبكرة والجسم A تكتب على الشكل التالي : $E_C = K(\theta_m^2 - \theta^2)$. استنتج تعبير K بدلالة m و g و r و C .

5 ـ أوجد بدلالة K و m و g و r و θ_m تعبير الطاقة الميكانيكية للمجموعة .

نأخذ : $cos\theta = 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$

الحل

1 ـ المعادلة التفاضلية لحركة المجموعة في حالة التذبذبات الصغيرة :
لدينا الاحتكاكات مهملة أي أن الطاقة الميكانيكية للمجموعة تنحفظ :

$$E_m = Cte \Longrightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0$$

من جهة أخرى فإن تغبير الطاقة الميكانيكية للمجموعة هو :

$$E_m = E_C + E_p$$

بحيث أن E_C الطاقة الحركية للمجموعة : $E_C = \dfrac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$ و E_p طاقة الوضع للمجموعة

$$E_p = E_{pp} + E_{pt}$$

E_{pp} طاقة الوضع الثقالية للمجموعة وبتوجيه المحور Oz نحو الأعلى وفي الحالة المرجعية لدينا $E_{pp} = 0$ عند $z = z_{ref} = 0$ فإن $E_{pp} = mgz$ بحيث أن $z = -rcos\theta$
ومنه فإن $E_{pp} = -mgrcos\theta$

الحل

E_{pt} طاقة الوضع للي للسلكين : $E_{pt}=\frac{1}{2}C\theta^2+\frac{1}{2}C\theta^2=C\theta^2$

وبالتالي فإن طاقة الوضع للمجموعة هي :

$$E_p=-mgrcos\theta+C\theta^2$$

أي أن الطاقة الميكانيكية للمجموعة هي :

$$E_m=\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2+C\theta^2-mgrcos\theta$$

في حالة التذبذبات ذات وسع صغير لدينا $cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2}$ أي أن :

$$E_m=\frac{1}{2}\left(J_0+mr^2\right)\dot{\theta}^2+\left(C+\frac{1}{2}mgr\right)\theta^2-mgr$$

أي أن :

$$\frac{dE_m}{dt}=\ddot{\theta}\left((J_0+mr^2)+\frac{2C+mg}{2}\theta\right)=0$$

وبما أن $\dot{\theta}\neq 0n$ فإن :

$$\ddot{\theta}+\frac{2C+mgr}{2(J_0+mr^2}\theta=0$$

2 ـ تحديد ثابتة اللي للسلك :

لدينا حسب المعادلة التفاضلية المحصل عليها في السؤال السابق :

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{2(J_0+mr^2)}{2C+mgr}}$$

وبالتالي فإن :

$$C=\frac{8\pi^2(J_0+mr^2)}{2T_0^2}-\frac{mgr}{2}$$

من جهة أخرى لدينا : $10T_0=8$ أي أن $T_0=0,8s$

تطبيق عددي : $C=0,2N.m/rad$

3 ـ المعادلة الزمنية للحركة :

بما أن المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية وخطية فإن حلها يكتب على الشكل التالي :

$$\theta(t)=\theta_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$$

لدينا عند اللحظة $t=0$ عندنا $\theta(t=0)=\theta_m=\pi/18rad$ أي أن $cos\varphi=1$ وبالتالي فإن $\varphi=0$ ومنه فإن المعادلة الزمنية تكتب :

$$\theta(t)=\frac{\pi}{18}cos(2,5\pi t)$$

الحل

4 ـ لنبين تعبير الطاقة الحركية للمجموعة :

لدينا الاحتكاكات مهملة أي أن هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية أي أن $E_m = E_m(t=0)$

و $E_m(t=0) = \left(C + \frac{1}{2}mgr\right)\theta_m^2 - mgr$

من جهة أخرى : $E_m = E_C + E_p$ أي أن $E_C = E_m - E_p$

$$E_C = \left(C + \frac{1}{2}mgr\right)\theta_m^2 - mgr - \left(C + \frac{1}{2}mgr\right)\theta^2 + mgr$$

$$E_C = \left(C + \frac{1}{2}mgr\right)\left[\theta_m^2 - \theta^2\right]$$

نضع : $K = \left(C + \frac{1}{2}mgr\right)$

$$E_C = K(\theta_m^2 - \theta^2)$$

5 ـ تعبير الطاقة الميكانيكية :

من خلال ما سبق لدينا :

$$E_m(t) = \left(C + \frac{1}{2}mgr\right)\theta_m^2 - mgr$$

$$E_m(t) = K\theta_m^2 - mgr$$