Les oscillations dans un circuit RLC série   الذبذبات الحرة في دارة RLC متوالية

I تفريغ مكثف في وشيعة

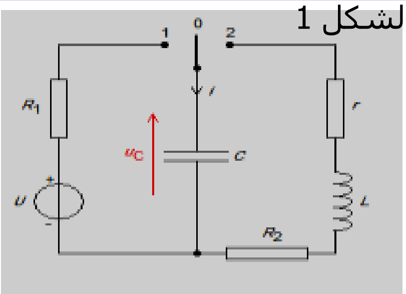
1. نشـاط تجريبي

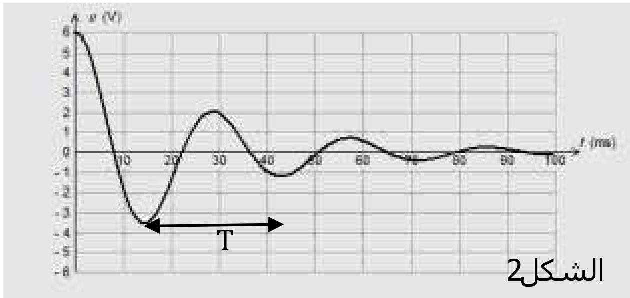
ننجز الدارة الكهربائية (شكل 1) و المكونة من مولد للتوتر $E = 6V$ و مكثف سعته $C = 10^{-4}F$ و موصل أومي مقاومته $R_2 = 10\Omega$ و وشيعة معامل تحريضها $L = 0,2H$ و مقاومتها $r = 5\Omega$ و قاطع التيار K.

أ. تجربة 1

نضع K في الموضع 1 ، (نتركه مدة كافية)نؤرجح K على الموضع 2 للحصول على تذبذبات حرة في الدارة RLC.
نعاين، على راسم التذبذب، التوتر $U_C(t)$ بين مربطي المكثف فنحصل على الشكل 2.

الشكل 1





الشكل2

ملاحظات وتفسير

- وسع التوتر$U_C(t)$ يتناقص خلال الزمن نقول أن التذبذبات مخمدة التوتر $U_C(t)$ متناوبا لكن ليس بدالة دوريا فنقول أن التذبذبات شبه دورية تتميز بشبه الدور نرمز له T
- التذبذبات تتم دون أن نزود الدارة RLC بالطاقة نقول أن التذبذبات حرة

تعريف

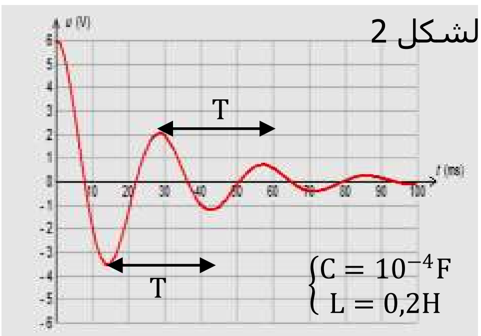
الدور المدة الزمنية الفاصلة بين قيمتين قصويتين متتاليتين للتوتر $U_C(t)$ أحسب شبه الدور T الشكل 1

ب. تجربة 2 تأثير L و C في شبه الدور

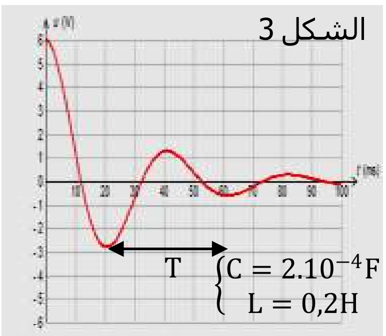
نغير معامل تحريض الوشيعة و سعة المكثف

- الحالة 1نغير قيمة $C = 10^{-4}F$ ونحتفظ ب L ثابتة، منحنى الشكل 3
- الحالة 2 نغير قيمة $L = 0,4H$ ونحتفظ ب C ثابتة منحنى الشكل 4

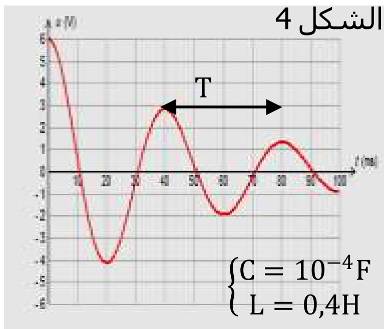
الشكل 2



الشكل 3



الشكل 4



ملاحظات وتفسير

مبيانيا نجد $T = 30ms$ أنظر الشكل 1

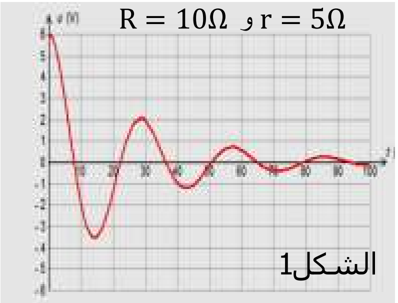
حساب شبه الدور الحالة 1 $T_1 = 35ms$ الحالة 2 $T_2 = 40ms$ نلاحظ أن قيمة شبه الدور تتزايد بتزايد قيمة سعة المكثف C و قيمة معامل التحريض L

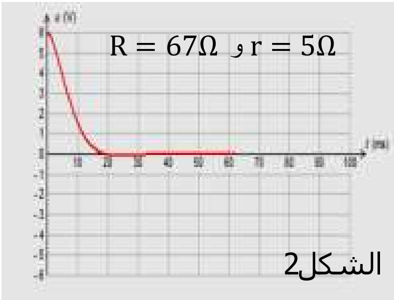
Les oscillations dans un circuit RLC série   الذبذبات الحرة في دارة RLC متوالية

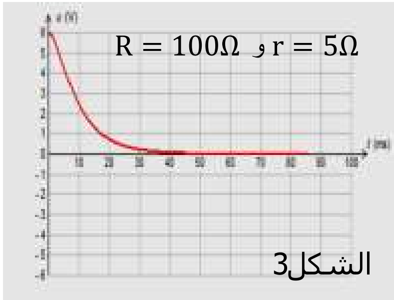
تجربة 3 تأثير قيمة المقاومة R

نغير قيمة R_2 في التركيب التجريبي السابق فنحصل على المنحنيات الموجودة في الأسفل 1و 2و 3

- ما تأثير المقاومة R على الذبذبات
- ماذا يحدث عندما تأخذ R القيمة $R = 67\Omega$؟







ملاحظات وتفسير

- مع تزايد قيمة المقاومة R تزداد ظاهرة الخمود الشكل 1 و 2 و 3
- عندما تصبح قيمة المقاومة كبير ينعدم التوتر U_C دون أن يتذبذب ويسمى هذا النظام نظام لا دوري

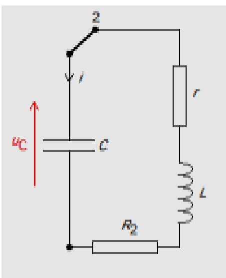
عندما تأخذ المقاومة القيمة $R = 67\Omega$ ينعدم التوتر $U_C(t)$ بسرعة دون أن يتذبذب ونسمي هذه المقاومة بالمقاومة الحرجة ونرمز لها ب $R_C = R = 67\Omega$ يسمى هذا النظام النظام الحرج الشكل 2 و هو نظام يفصل النظام الشبه الدوري و النظام اللا دوري

II دراسة التذبذبات الحرة في الدارة RLC

1. بتطبيق قانون إضافية التوترات أوجد المعادلة التفاضلية لدارة RLC متوالية التي يحققها التوتر $U_C(t)$ بين مربطي المكثف. ثم أستنتج المعادلة التفاضلية التي تحققها الشحنة $q(t)$
2. حدد المقدار المسؤول عن خمود الذبذبات
3. استنتج المعادلة التفاضلية للدارة في حالة $r = 0$ و $R = 0$

الجواب

1. المعادلة التفاضلية



بتطبيق قانون إضافية التوترات نجد: $U_C + U_L + U_R = 0$

$$U_C + r.i + L\frac{di}{dt} + R.i = 0 \quad \Rightarrow U_C + L\frac{di}{dt} + (R + r).i = 0$$

نعلم أن $i = \frac{dq}{dt}$ و $q = C.U_C$ و بالتالي $i = C\frac{dU_c}{dt}$ و $L\frac{di}{dt} = LC\frac{d^2U_C}{d^2t}$ و منه:

$$\frac{d^2U_C}{d^2t} + \frac{1}{LC}U_C + \frac{(R+r)}{L}.\frac{dU_c}{dt} = 0 \qquad \text{نضع} \qquad (R + r) = R_T$$

$w = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ أي $w^2 = \frac{1}{LC}$ ويسمى النبض الخاص

$$\frac{d^2U_C}{d^2t} + \frac{1}{LC}U_C + \frac{(R+r)}{L}.\frac{dU_c}{dt} = 0$$ المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $U_C(t)$

نعلم أن $q = C.U_C$ أي $U_C = \frac{q}{C}$ نعوض في المعادلة التفاضلية نجد:

$$\frac{d^2q}{d^2t} + \frac{1}{LC}q + \frac{(R+r)}{L}.\frac{dq}{dt} = 0$$ المعادلة التفاضلية التي تحققها الشحنة

2. المقدار المسؤل عن الخمود

الجزء $\frac{d^2U_C}{d^2t} + \frac{1}{LC}U_C$ له حل جيبيا

اذن نستنتج ان الجزء المسؤول على تناقص الوسع خلال الزمن هو المقدار $\frac{(R+r)}{L}.\frac{dU_c}{dt}$

3. المعادلة التفاضلية في حالة r=0 و R=0

لدينا $\frac{d^2U_C}{d^2t}+\frac{1}{LC}U_C+\frac{(R+r)}{L}.\frac{dU_c}{dt}=0$ في حالة (R+r)=0 فان: $\frac{d^2U_C}{d^2t}+\frac{1}{LC}U_C=0$

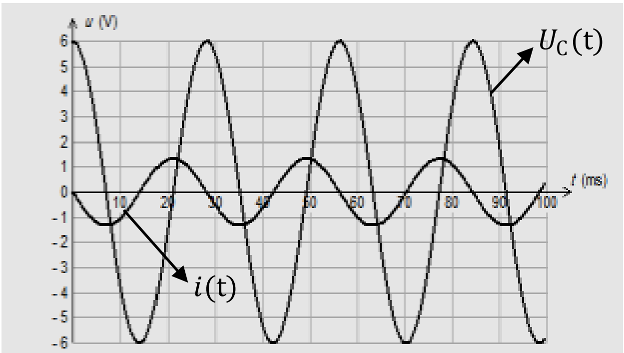
III دراسة التذبذبات الحرة في دارة مثالية LC

1. تعريف دارة مثالية LC

نسمي الدارة المكون من مكثف و وشيعة مقاومتها الداخلية منعدمة دارة مثالية LC

ننجز التركيب التجريبي الخاص بالدار المثالية المكون من:

مكثف سعته C و وشيعة معامل تحريضها L و مقاومتها الداخلية منعدمة تكون التذبذبات الكهربائية الحرة الغير المخمدة لدارة المثاليةLC جيبية الشكل 2

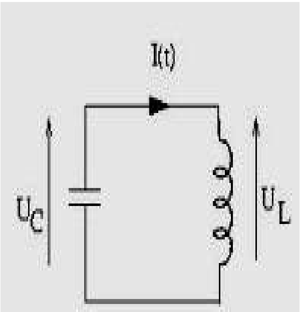


الشكل2

1. بتطبيق قانون إضافية التوترات أوجد المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $U_C(t)$
2. حل المعادلة التفاضلية يكتب على الشكل التالي:

$$U_C(t)=U_m\cos(\frac{2\pi}{T}t+\varphi)$$

- U_m وسع التذبذبات
- $(\frac{2\pi}{T}t+\varphi)$ الطور في اللحظة t
- T_0 الدور الخاص للتذبذبات
- φالطور عند أصل التواريخ



الشكل1

أ. بين أن تعبير الدور الخاص هو $T_0=2\pi\sqrt{LC}$ ثم بين أن ل T_0 بعد الزمن

ب. حدد U_m و φ الطور عند t=0

1. بتطبيق قانون إضافية التوترات نجد: $U_C+U_L=0$

$$U_C+L\frac{di}{dt}=0 \Rightarrow U_C+L\frac{di}{dt}+=0$$

نعلم أن $i=\frac{dq}{dt}$ و $q=C.U_C$ و بالتالي $i=C\frac{dU_c}{dt}$ و $L\frac{di}{dt}=LC\frac{d^2U_C}{d^2t}$ و منه:

$\frac{d^2U_C}{d^2t}+\frac{1}{LC}U_C=0$ نضع $w=\sqrt{\frac{1}{LC}}$ أي $w^2=\frac{1}{LC}$ ويسمى النبض الخاص

$\frac{d^2U_C}{d^2t}+\frac{1}{LC}U_C=0$ المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $U_C(t)$

نعلم أن $q=C.U_C$ أي $U_C=\frac{q}{C}$ نعوض في المعادلة التفاضلية نجد:

$\frac{d^2q}{d^2t}+\frac{1}{LC}q=0$ المعادلة التفاضلية التي تحققها الشحنة

2. حل المعادلة التفاضلية

أ. تعبير الدور الخاص

لدينا $U_C(t)=U_m\cos(\frac{2\pi}{T}t+\varphi)$

نشتق $U_C(t)$ مرتين بدلالة الزمن $\frac{dU_c}{dt}=\frac{d}{dt}U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)=U_m\frac{d}{dt}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$ و منه

$\frac{dU_c}{dt}=-U_m\frac{2\pi}{T}sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$ أي $\frac{d^2U_C}{d^2t}=-U_m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$

نعوض في المعادلة التفاضلية نجد:

$$\frac{d^2U_C}{d^2t}+\frac{1}{LC}U_C=0 \Rightarrow -U_m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)+\frac{1}{LC}U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)=0$$

نعلم أن $U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right) \neq 0$ و بالتالي $\frac{1}{LC}-\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 0$ و منه $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

معادلة الأبعاد $[T] = \sqrt{[L][C]}$ نعلم أن $[L] = \frac{[U].[t]}{[I]}$ و $[C] = \frac{[I].[t]}{[U]}$ نعوض في $[T]$ نجد $[T] = [t]$ لها بعد الزمن

ب. تحديد U_m و φ الطور عند t=0

المرحلة 1 نعبر عن المقدارين $U_C(t)$ و $i(t)$ في اللحظة t=0 نعلم أن $i(t) = C\frac{dU_C}{dt}$

التوتر U_C دالة متصلة ومنه $i(t)$ دالة متصلة كذلك

الشروط البدئية عند اللحظة $t=0$ $U_C(0) = E$ و $i(0) = 0$

لدينا $i(t) = -C.U_m\frac{2\pi}{T_0}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$ الشروط البدئية $i(0) = -C.U_m\frac{2\pi}{T_0}\sin(\varphi) = 0$ ومنه

$$\sin(\varphi) = 0 \Longrightarrow \begin{cases}\varphi = 0\\ \varphi = \pi\end{cases}$$

نعلم أن $U_C(t) = U_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi)$ و $U_C(0) = E > 0$ وبالتالي $U_C(0) = U_m\cos(\varphi) = E$ ومنه

$\cos(\varphi) > 0$ و بالتالي فان $\varphi = 0$ وبالتالي فان: $U_C(t) = E\cos(\frac{2\pi}{T_0}t)$

ج. تعبير الشحنة q وشدة التيار الكهربائي

لدينا $q(t) = CU_C(t)$ و بالتالي: $q(t) = CU_m.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right) = q_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$ مع $CU_m = q_m$

د. شدة التيار الكهربائي

نعلم أن $i(t) = \frac{dq}{dt}$ وبالتالي $i(t) = -C.U_m\frac{2\pi}{T_0}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right) = C.U_m\frac{2\pi}{T_0}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$ مع

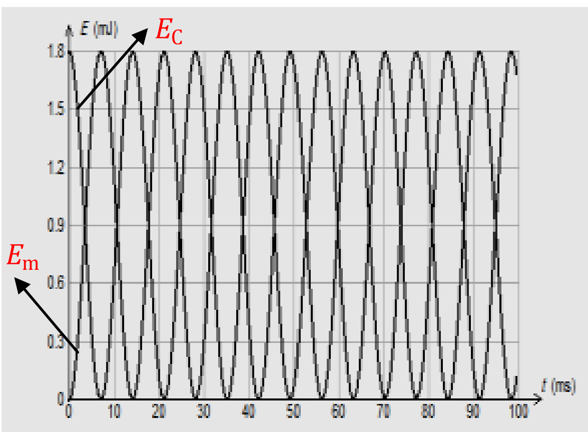
$I_{max} = C.U_m\frac{2\pi}{T_0}$

عندما يكون التوتر منعدما يكون التيار قصويا و العكس

IV انتقالات الطاقة بين المكثف و الو شيعة

1. الطاقة في الدارة LC المثالية

- تكون الطاقة الكلية لدارة مثالية LC ثابتة و تساوي الطاقة البدئية المخزونة في المكثف.
- خلال الذبذبات غير المخمدة تتحول الطاقة الكهربائية في المكثف إلى طاقة مغناطيسية في الوشيعة و العكس.
- يمثل المنحنى تغيرات الطاقة المخزونة في المكثف و الطاقة المخزونة في الوشيعة



تتناقص الطاقة المخزونة في المكثف بنفس المقدار التي تتزايد به الطاقة المخزونة في الوشيعة والعكس

صحيح ،بينما المجموع يبقى ثابتا $E_T = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}CU_C^2(t) = cte$

البرهة رياضيا على هذه النتيجة

الطريقة 1 لدينا $E_T = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}CU_C^2(t)$

و بالتالي: $\frac{dE_T}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}CU_C^2(t))$ $\frac{dE_T}{dt} = iL\frac{d}{dt}i + CU_C\frac{d}{dt}U_C)$

نعلم أن $i = \frac{dq}{dt}$ و $q = CU_C$ بالتالي: $\frac{dE_T}{dt} = \frac{dq}{dt}L\frac{d^2}{d^2t}q + \frac{q}{C}\frac{d}{dt}q)$

$$\frac{dE_T}{dt} = L\frac{dq}{dt}(\frac{d^2}{d^2t}q + \frac{1}{LC}q)$$

بالنسبة للدارة LC المعادلة التفاضلية $\frac{d^2q}{d^2t} + \frac{1}{LC}q = 0$ ومنه: ومنه $\frac{dE_T}{dt} = 0$ اذن الطاقة الكلية تنحفض خلال الزمن

الطريقة 2

لدينا $E_T = \frac{1}{2}Li^2(t) + \frac{1}{2}CU_C^2(t)$

نعلم أن: $U_C(t) = U_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$ و $i(t) = -C.U_m\frac{2\pi}{T_0}\sin(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$ ومنه:

$$E_T = \frac{1}{2}L\left[-C.U_m\frac{2\pi}{T_0}\sin(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)\right]^2 + \frac{1}{2}C\left[U_m\cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)\right]^2$$

$E_T = \frac{1}{2}L\left(C.U_m\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\sin^2(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi) + \frac{1}{2}CU_m^2\cos^2(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$ لدينا $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ ومنه:

$$E_T = \frac{1}{2}LC^2.U_m^2\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2\sin^2(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi) + \frac{1}{2}CU_m^2\cos^2(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$$

اذن $E_T = \frac{1}{2}CU_m^2\sin^2(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi) + \frac{1}{2}CU_m^2\cos^2(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$

$$E_T = \frac{1}{2}CU_m^2\left[\sin^2(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi) + \cos^2(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)\right]$$

نعلم $\left[\sin^2(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi) + \cos^2(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)\right] = 1$ كيفما كان الزمن اذن

$E_T = \frac{1}{2}CU_m^2 = cte$ اذن الطاقة الكلية تنحفظ

تعريف

الطاقة الكلية E_T المخزونة في الدارة LC هي في كل لحظة مجموع الطاقة الكهربائية E_C و الطاقة الكهربائية في الوشيعة E_m حيث: $E_T = E_m + E_C = \frac{1}{2}Li^2(t) + \frac{1}{2}CU_C^2(t)$

2. الطاقة في الدارة RLC

- تتناقص الطاقة الكلية لدارة RLC تدريجيا بسبب مفعول جول

البرهنة على النتيجة المحصل عليه تجريبية

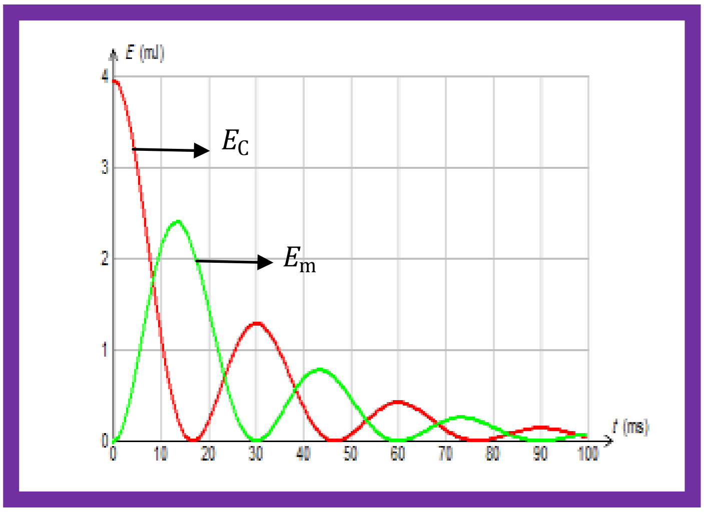
لدينا $E_T = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}CU_C^2(t)$

نشتق الطاقة الكلية النسبة للزمن $\frac{dE_T}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}CU_C^2(t))$

$$\frac{dE_T}{dt} = iL\frac{d}{dt}i + CU_C\frac{d}{dt}U_C)$$

نعلم أن $i = \frac{dq}{dt}$ و $q = CU_C$ بالتالي: $\frac{dE_T}{dt} = \frac{dq}{dt}L\frac{d^2}{d^2t}q + \frac{q}{C}\frac{d}{dt}q)$

$$\frac{dE_T}{dt} = L\frac{dq}{dt}(\frac{d^2}{d^2t}q + \frac{1}{LC}q)$$



بالنسبة للدارة RLC المعادلة التفاضلية

$\frac{d^2q}{d^2t}+\frac{1}{LC}q+\frac{(R+r)}{L}.\frac{dq}{dt}=0$ ومنه:

$\frac{d^2q}{d^2t}+\frac{1}{LC}q=-\frac{(R+r)}{L}.\frac{dq}{dt}$ و بالتالي:

$$\frac{dE_T}{dt}=-(R+r).\left(\frac{dq}{dt}\right)^2=-(R+r)i^2<0$$

التناقص يعزى إلى وجود المقاومة

٧ صيانة الذبذبات

يمكن صيانة ذبذبات دارة RLC متوالية و الحصول على توتر متذبذب ذي وسع ثابت، باستعمال جهاز يزود الدارة بطاقة تعوض الطاقة المبددة في الدارة بمفعول جول

جهاز الصيانة عبارة عن مولد يزود الدارة بتوتر u_s يتناسب اطرادا مع شدة التيار $i(t)$

$(u_s(t)=R_0.i)$ و هو يتصرف كمقاومة سالبة.تكتب المعادلة التفاضلية للدارة الممثلة جانبه على الشكل التالي:
بتطبيق قانون إضافية التوترات نجد:

$$U_C+U_L+U_R=U_S$$

$$U_C+r.i+L\frac{di}{dt}+R.i=R_0i \quad \Longrightarrow U_C+L\frac{di}{dt}+(R+r).i=R_0i$$

نعلم أن $i=\frac{dq}{dt}$ و $q=C.U_C$ و بالتالي $i=C\frac{dU_c}{dt}$ و $L\frac{di}{dt}=LC\frac{d^2U_C}{d^2t}$ و منه:

$\frac{d^2U_C}{d^2t}+\frac{1}{LC}U_C+\frac{(R+r)}{L}.\frac{dU_c}{dt}=\frac{R_0}{L}.\frac{dU_c}{dt}$ نضع $(R+r)=R_T$ ومنه $\frac{d^2U_C}{d^2t}+\frac{1}{LC}U_C+\frac{1}{L}(R_T-R_0)\frac{dU_c}{dt}=0$

عند ضبط المقاومة R_0 على القيمة R_T نجد:

$\frac{d^2U_C}{d^2t}+\frac{1}{LC}U_C=0$ و هي ثمتل المعادلة التفاضلية الخاصة بالدارة المثالية LC