

## المجموعات الميكانيكية المتذبذبة ومظاهر الطاقة تصحيح التمارين

### تمرين 1

1\_1 تحديد  $\Delta\ell$  عند التوازن  $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$  الإسقاط على Oz  $mg - K\Delta\ell = 0$

$$\Delta\ell = 2,5cm \text{ إذن } \Delta\ell = \frac{mg}{K} \text{ تطبيق عددي}$$

1\_2 تحديد المعادلة التفاضلية

نختار معلم Oz كمعلم غاليلي ونطبق العلاقة الأساسية لديناميك  $\vec{P} + \vec{F}' = m\vec{a}$  إسقاط العلاقة على Oz

$$mg - K\Delta\ell' = m\ddot{z} \text{ بحيث أن } \Delta\ell' = \Delta\ell + z \text{ لحظة } t$$

عند التوازن  $mg - K\Delta\ell = 0$  إذن  $-Kz = m\ddot{z}$  أي

$$\ddot{z} + \frac{K}{m}z = 0 \text{ أن المعادلة التفاضلية للحركة هي}$$

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \text{ نضع } \omega_0^2 = \frac{K}{m} \text{ وتصبح المعادلة}$$

إذن فالحركة مستقيمة جيبية نبضها الخاص هو :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

2\_2 المعادلة الزمنية للحركة

$$z = Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ بحيث أن}$$

عندنا  $z = Z_m$  أي أن  $\cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$  وعند اللحظة  $\omega_0 = 20 \text{ rad/s}$  و  $Z_m = 4.10^{-2} \text{ m}$

المعادلة الزمنية تكتب على الشكل التالي

$$z = 4.10^{-2} \cos(20t)$$

$$V_1 = -Z_m \sqrt{\frac{K}{m}} \text{ 2_3 نبين أن}$$

نحدد السرعة في اللحظة t وذلك باشتقاق z(t)  $v = -Z_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

عند مرور الجسم من موضع توازنه تكون القيمة المطلقة لسرعته قصوى  $V_1 = \pm Z_m \omega_0$  وبما أنه يمر

لأول مرة فسيكون منحى السرعة عكس المتجهة  $\vec{k}$  أي أن  $\vec{V}_1 = -Z_m \sqrt{\frac{K}{m}} \vec{k}$  أي أن  $V_1 = -Z_m \sqrt{\frac{K}{m}}$

تطبيق عددي  $V_1 = 0,8 \text{ m/s}$

3\_ عند انفصال الجسم عن النابض يكون الجسم في سقوط حر تحت تأثير وزنه فقط مع إهمال تأثير الهواء

تسارع الجسم هو  $a = g$  ونأخذ  $z_0 = 0$  والسرعة البدئية  $V_0 = -V_1$

$$z = 5t^2 + 0,8t$$

### تمرين 2

1\_ المعادلة التفاضلية لحركة المجموعة (S)

المجموعة (S) قابلة للدوران حول المحور  $\Delta$

نطبق العلاقة الأساسية للتحرّك على المجموعة (S) في معلم أرضي نعتبره غاليليا .

جرد القوى المطبقة على المجموعة (S) :

$\vec{P}$  و  $\vec{R}$  تأثير المحور على الجسم (S) .

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0 \Rightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

من خلال الشكل يتبين أن

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -2mg \cdot OH$$

$$OH = OG \sin \theta$$

لنحدد  $OG$  بتطبيق العلاقة المرجحية على المجموعة (S) :

$$\vec{OG} = \frac{m\vec{OG}_1 + m\vec{OG}_2}{2m}$$

بحيث أن  $G_1$  مركز قصور الساق و  $G_2$  مركز قصور الكرة ز

ونختار  $O$  متطابقة مع المحور  $\Delta$  . أي أن  $\vec{OG}_1 = 5R\vec{i}$  و  $\vec{OG}_2 = 11R\vec{i}$

$$OG = 8R \text{ وبالتالي } \vec{OG} = \frac{16R}{2}\vec{i} = 8R\vec{i}$$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -2mg \cdot OG \sin \theta \Rightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -16mgR \sin \theta$$

$$16mgR \sin \theta + J_\Delta \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{16mgR}{J_\Delta} \sin \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{16mgR}{J_\Delta} \theta = 0 \text{ فإن } \sin \theta \approx \theta \text{ أي أن } \theta_m = 10^\circ$$

طبيعة حركة المجموعة دورانية جيبية بحيث المعادلة التفاضلية تقبل حلا لها المعادلة ذات الشكل

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \text{ التالي}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{16mgR}} = 1s \text{ دورها الخاص يكتب على الشكل التالي :}$$

2 - المعادلة الزمنية لحركة المجموعة (S) هي :

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \text{ بحيث أن } \theta_m = 10^\circ = \frac{\pi}{18} \text{ rad}$$

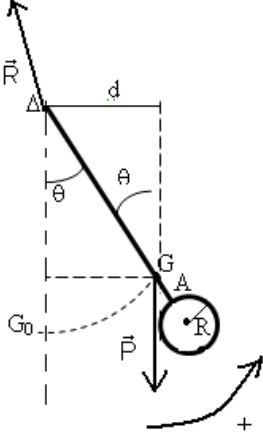
$$\theta(0) = \theta_m = \theta_m \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ عند اللحظة } t = 0 \text{ لدينا}$$

$$\theta(t) = \frac{\pi}{18} \cos(2\pi t)$$

**5 - الطاقة الحركية للمجموعة بدلالة الزمن t**

$$E_C = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 \Rightarrow E_C = \frac{1}{2} J_\Delta \omega_0^2 \theta_m^2 \sin^2(2\pi t)$$

تكون الطاقة  $E_C$  قصوية



$$-1 \leq \sin(2\pi t) \leq 1 \Rightarrow \sin^2(2\pi t) \leq 1$$

$$\frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2 \sin^2(2\pi t) \leq \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2$$

$$E_C \leq \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2$$

إذن القيمة القصوى للطاقة الحركية هي :  $E_C = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2$

تطبيق عددي :  $E_{Cmax} = 6.10^{-3} \text{J}$

### 6 - نستنتج تعبير طاقة الوضع التفاضلية للمجموعة S :

بما أن الاحتكاكات مهملة نطبق انحفاظ الطاقة الميكانيكية بين موضعين وهما الموضع التوازن الذي تمر منه المجموعة وتكون هنا السرعة قصوى أي أن الطاقة الميكانيكية قصوى  $E_{Cmax} = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2$  ونعتبر

أن طاقة الوضع منعدمة أي أن  $E_m = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2$  . و موضع ثاني في اللحظة t أي أن الطاقة

الميكانيكية هي  $E_m = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2 \sin^2(\omega_0 t) + E_p$

انحفاظ الطاقة الميكانيكية  $\frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2 \sin^2(\omega_0 t) + E_p = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2$

$$E_p = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega_0^2 \theta_m^2 (1 - \sin^2(\omega_0 t))$$

$$E_p = E_{Cmax} \cos^2(2\pi t)$$

### تمرين 3

I - الدراسة التحريكية

1 - المعادلة التفاضلية

القوى المطبقة على الساق  $\vec{P}$  و  $\vec{R}$

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على الساق :

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

$$-Mg \frac{L}{2} \sin \theta = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{MgL}{2J_{\Delta}} \sin \theta = 0$$

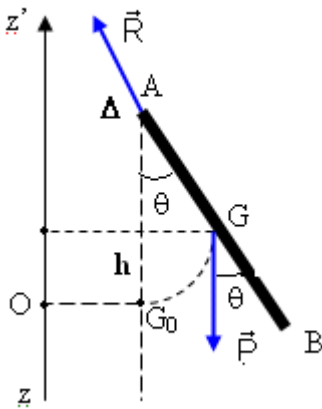
حسب شكل المعادلة التفاضلية فهي ليست خطية إذن فحركة الساق حركة تذبذبية

2 - المعادلة التفاضلية في حالة تذبذبات ذات وسع صغير حسب قانون التوافق ( لا يتعلق دور حركة النواس بوسع التذبذبات في حالة التذبذبات ذات وسع صغير )

في حالة تذبذبات ذات وسع صغير  $\theta_m = \frac{\pi}{10} \text{rad}$  نعتبر أن  $\sin \theta \approx \theta$

وتصبح المعادلة التفاضلية على الشكل التالي :

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L} \theta = 0 \text{ هي فالمعادلة التفاضلية هي } J_{\Delta} = \frac{1}{3} ML^2 \text{ بما أن } \ddot{\theta} + \frac{MgL}{2J_{\Delta}} \theta = 0$$



3 - حساب قيمة الدور :

حسب المعادلة التفاضلية في حالة التذبذبات ذات وسع صغير فإن حركة النواس حركة تذبذبية جيبية

$$T_0 = 1,26s \text{ : تطبيق عددي } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

II - الدراسة الطاقية

1 - نبين العلاقة

نعلم أن طاقة الوضع الثقالية هي :  $E_p = Mgz + C$  حسب الحالة المرجعية لطاقة الوضع الثقالية

وحسب الشكل جانبه

$E_p = 0$  بالنسبة  $z = 0$  إذن  $C = 0$  وطاقة الوضع تكتب على الشكل التالي  $E_p = Mgz$  بحيث أن

$$z = \frac{L}{2}(1 - \cos \theta)$$

$$E_p = \frac{MgL(1 - \cos \theta)}{2} \text{ ومنه}$$

أ - 2

الحالة الأولى : عند مرور الساق من موضع توازنها . فحسب الشكل  $\theta = 0$  و  $E_m = E_c = 0,5J$  و

$$E_p = 0$$

$$\frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}_m^2 = 0,5 \Rightarrow \dot{\theta}_m = \sqrt{\frac{2 \times 0,5}{J_{\Delta}}} = 5,77 \text{ rad / s}$$

ب - موضع الساق عندما تكون  $E_c = 0,25J$  أي أن

$$\theta = \pm \frac{\pi}{3} \text{ rad} \text{ فحسب الشكل } E_m = E_p + E_c \Rightarrow E_p = E_m - E_c = 0,5 - 0,25 = 0,25J$$

الحالة الثانية :

عندما تكون  $E_m > E_p \Rightarrow E_c \neq 0$  مهما كانت t أي أن الساق ستدور حول المحور  $\Delta$  .

• القيمة القصوية والقيمة الدنوية للسرعة الزاوية  $\dot{\theta}$

تكون السرعة الزاوية قصوية عندما تكون الطاقة الحركية  $E_c$  قصوية ونرمز لها ب  $E_{C \max}$  حيث تكون

طاقة الوضع دنوية وحسب المبيان أن طاقة الوضع الدنوية عندما تكون  $\theta = 0$  أي  $E_{p \min} = 0$  وفي هذه

$$E_m = E_{C \max} = \frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}_{\max}^2 \Rightarrow \dot{\theta}_{\max} = \sqrt{\frac{2E_m}{J_{\Delta}}} \text{ الحالة}$$

لدينا  $J_{\Delta} = \frac{1}{3}ML^2 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ kg.m}^2$  وأن  $E_m$  حسب الشكل هي :  $E_m = 1,5J$

$$\dot{\theta}_{\max} = \sqrt{\frac{2E_m}{J_{\Delta}}} = 10,8 \text{ rad / s}$$

تكون السرعة الزاوية دنوية عندما تكون الطاقة الحركية دنوية  $E_{C \min}$  وتكون طاقة الوضع قصوية وفي هذه

الحالة

$$E_m = E_{C \min} + E_{p \max} \Rightarrow E_{C \min} = E_m - E_{p \max}$$

$$\frac{1}{2}J_{\Delta}\dot{\theta}_{\min}^2 = E_m - E_{p \max} \Rightarrow \dot{\theta}_{\min} = \sqrt{\frac{2(E_m - E_{p \max})}{J_{\Delta}}} \text{ أي أن}$$

حسب المبيان لدينا :

$$\dot{\theta}_{\min} = \sqrt{\frac{2(E_m - E_{p\max})}{J_{\Delta}}} = 4,08 \text{ rad/s} \quad \text{وبالتالي } E_{p\max} = 1,5 \text{ J و } E_m = 1,75 \text{ J}$$

#### تمرين 4

نعتبر أن النابض عندما يكون لا مطال ولا مكبوس وتوجد فوقه الكفة  $P$  أن طوله هو  $\ell_0$  عند وضع الجسم  $(S)$  فوق الكفة يصبح طول النابض  $\ell_1$  ويعتبر هذا الموضع موضع التوازن المستقر حيث نعتبره أصل المحور الرأسى  $(O, \vec{k})$  موجه نحو الأعلى .

#### 1\_ عند التوازن القوى المطبقة على المجموعة

$\vec{P}$  و  $\vec{F}$  تطبق شرط التوازن في المركز  $G$

$$\vec{P} + \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ونسقط هذه العلاقة على المحور Oz}$$

$$\vec{P} - k\overline{G_0G_{eq}} = \vec{0}$$

$$-(m_1 + m_2)g + k|\Delta\ell| = 0$$

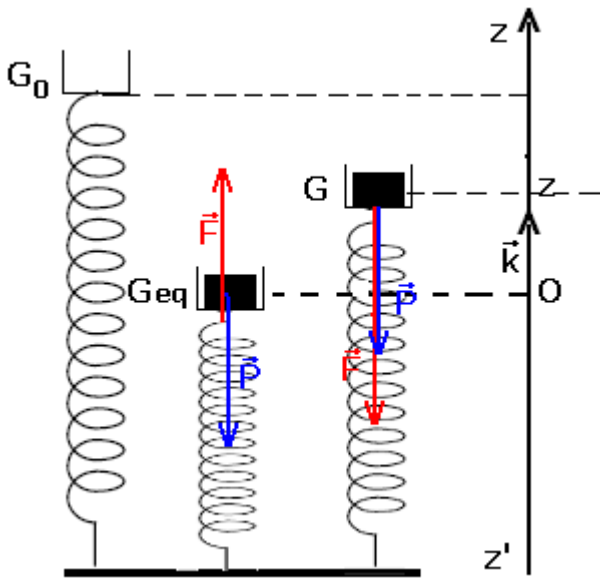
$$|\Delta\ell| = \frac{(m_1 + m_2)g}{K}$$

$$|\Delta\ell| = 1 \text{ cm}$$

2\_ المعادلة التفاضلية للحركة :

نطبق العلاقة الأساسية لديناميك على المجموعة

$$\vec{F} + \vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{a}$$



$$-k\overline{G_0G} + \vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{a} \Rightarrow -k(\overline{G_0G_{eq}} + \overline{G_{eq}G}) + \vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{a}$$

$$-k\overline{G_0G_{eq}} - k\overline{G_{eq}G} + \vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{a}$$

حسب السؤال السابق لدينا  $\vec{P} - k\overline{G_0G_{eq}} = \vec{0}$

$$-k\overline{G_{eq}G} = (m_1 + m_2)\vec{a}$$

نسقط هذه العلاقة المتجهية على Oz :  $-kz = (m_1 + m_2)\ddot{z}$

$$\ddot{z} + \frac{k}{m_1 + m_2}z = 0 \quad \text{إذن المعادلة التفاضلية لحركة المجموعة هي}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)}{k}} \quad \text{نستنتج الدور الخاص للحركة}$$

حساب  $T_0$  :

$$T_0 = 0,2 \text{ s}$$

#### 2\_ 2\_ المعادلة الزمنية لحركة المجموعة :

حركة G تذبذبية فمعادلتها الزمنية والتي هي حل للمعادلة التفاضلية السابقة هي :

تحديد الطور عند اللحظة  $t=0$

$$z(0) = Z_m \cos \varphi \Rightarrow 0,2 = Z_m \cos \varphi$$

بالنسبة للسرعة عند اللحظة  $t=0$

$$\dot{z}(t) = -Z_m \frac{2\pi}{T_0} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$t = 0 \Leftrightarrow \dot{z}(0) = -Z_m \frac{2\pi}{T_0} \sin \varphi$$

$$\dot{z}(0) = -1,2 = -Z_m \frac{2\pi}{T_0} \sin \varphi \text{ إذن } \dot{z}(0) < 0$$

من المعادلتين نستنتج :

$$\begin{cases} 0,2 = Z_m \cos \varphi \\ 1,2 = Z_m 10\pi \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{0,2}{Z_m} = \cos \varphi \\ \frac{1,2}{10\pi Z_m} = \sin \varphi \end{cases}$$

$$\cos \varphi = \frac{0,200}{0,203} \Rightarrow \varphi = 10^\circ = \frac{\pi}{18} \text{ rad و بالنسبة لـ } Z_m = 0,203m$$

$$z(t) = 0,2 \cos(10\pi t + \frac{\pi}{18})$$

**3- نختار أصل لمعلم كمرجع لطاقة الوضع الثقالية :**

نحن بصدد اختيار Oz موجه نحو الأعلى إذن  $E_p(t) = (m_1 + m_2)gz(t) + C$  بما أنه الحالة المرجعية تم

اختيارها في المستوى حيث  $z=0$  فإن  $C=0$

طاقة الوضع المرنة حسب التعريف  $E_p = \frac{1}{2}ka^2 + Cte$  حيث  $a$  إطالة النابض

$$0 = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 + Cte \Rightarrow Cte = -\frac{1}{2}k\Delta\ell^2 \text{ إذن } z=0 \text{ مرجعية ونختار كحالة مرجعية } a = |\Delta\ell| - z$$

$$E_p(t) = \frac{1}{2}kz^2 - k|\Delta\ell|z \text{ عند نشر هذه العلاقة نحصل على } E_p(t) = \frac{1}{2}k(|\Delta\ell| - z)^2 - \frac{1}{2}k\Delta\ell^2$$

إذن الطاقة الميكانيكية للمجموعة هي :

$$E_m(t) = E_p(t) + E_c(t)$$

$E_p(t)$  طاقة الوضع الكلية للمجموعة و  $E_c(t)$  الطاقة الحركية للمجموعة .

$$E_m(t) = \frac{1}{2}kz^2 - k|\Delta\ell|z + (m_1 + m_2)gz + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{z}^2$$

$$-(m_1 + m_2)g + k|\Delta\ell| = 0 \text{ نعلم أنه عند التوازن}$$

$$E_m(t) = \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{z}^2 \text{ إذن}$$

نستنتج المعادلة التفاضلية للحركة نعلم أن الحركة تتم بدون احتكاك إذن هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية

$$\frac{dE_m(t)}{dt} = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2)\ddot{z} + kz = 0$$

$$\ddot{z} = -\frac{k}{(m_1 + m_2)}z$$

$$\ddot{z} + \frac{k}{(m_1 + m_2)}z = 0$$

### 3 - 2 السرعة V التي ستمر بها المجموعة من النقطة 0 لأول مرة .

نطبق مبدأ انحفاظ الطاقة الميكانيكية عند انتقال الجسم من الموضع ذي الأنسوب  $z = -Z_m$  و  $z = 0$

$$\frac{1}{2}kZ_m^2 + 0 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + 0$$

$$V = 1,2m/s \text{ تطبيق عددي } V = \sqrt{\frac{kZ_m^2}{m_1 + m_2}}$$

نبين أن المجموعة ممكن أن تتذبذب بوسع  $z_i > z$  دون أن يغادر الجسم الكفة :

نطبق القانون الثاني لنيوتن على الجسم S الموضوع على الكفة  $\vec{P} + \vec{R} = (m_1 + m_2)\vec{a}$

إسقاط العلاقة على Oz  $-(m_1 + m_2)g + R = (m_1 + m_2)\ddot{z}$  حسب الدراسة السابقة

$$\ddot{z} = -\frac{k}{m_1 + m_2}z$$

نعوض  $\ddot{z}$  في العلاقة

$$-(m_1 + m_2)g + R = -(m_1 + m_2)\frac{k}{m_1 + m_2}z$$

$$R = (m_1 + m_2)g - kz$$

لكي لا يغادر الجسم الكفة يجب أن تكون  $R > 0$  هذا يعني أن  $z_i < \frac{(m_1 + m_2)g}{k}$

نضع  $Z_m = \frac{(m_1 + m_2)g}{k}$  لكي يبقى الجسم في حركة تذبذب حول 0 يجب  $z_i < Z_m \Rightarrow z_i < 1cm$

مما يبين أن دراستنا النظرية لا يمكن أن توافق ما هو تجريبي وهذا ما سنتطرق إليه في الجزء الثاني .

4 - تعبيري  $Z_{max}$  و  $Z_{max}$

نطبق انخفاض الطاقة الميكانيكية قبل الانفصال وبعد الانفصال .

$$E_m = \frac{1}{2}m_1V^2 + 0 \text{ : قبل الانفصال}$$

$$E'_m = 0 + m_1gz_{max} \text{ : بعد الانفصال}$$

$$E_m = E'_m \Rightarrow z_{max} = \frac{V^2}{2g} \text{ تطبيق عددي } z_{max} = 7,2cm$$

بالنسبة للناض والكفة

$$E_m = \frac{1}{2}m_2V^2 + 0 + 0 \text{ : مباشرة قبل الانفصال}$$

$$E'_m = \frac{1}{2}kZ_{\max}^2 + m_2gZ_{\max} \text{ بعد الانفصال}$$

$$E_m = E'_m \Rightarrow Z_{\max}^2 + 2m_2gZ_{\max} - m_2V^2 = 0$$

$$Z_m^2 + 4Z_m - 0,29 = 0 \text{ معادلة من الدرجة الثانية}$$

$$Z_{\max} = 0,07m \text{ نحتفظ بالحل الموجب}$$

### تمرين 5

1 - طبيعة حركة القرص :

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على القرص له حركة دوران حول محور يجسده السلك  
جهد القوى المطبقة على السلك :

$\vec{P}$  وزن القرص ،  $\vec{R}$  تأثير السلك على القرص ، مزدوجة اللي المطبقة من طرف السلك .

$$\mathcal{M}_C = J_\Delta \ddot{\theta} \Rightarrow -C\theta = J_\Delta \ddot{\theta} \text{ أي أن } \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0 \text{ و } \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 0 \text{ لدينا } \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_C = J_\Delta \ddot{\theta}$$

وبالتالي نحصل على المعادلة التفاضلية التالية :  $\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$  خطية حلها جيبي وبالتالي فطبيعة

حركة القرص حركة دورانية جيبية .

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}} \text{ دورها هو :}$$

2 - حساب ثابتة اللي بالنسبة لـ  $T_0 = 0,92s$  :

$$T_0^2 = 4\pi^2 \frac{J_\Delta}{C} \Rightarrow C = \frac{4\pi^2 J_\Delta}{T_0^2} = 0,233.10^{-2} N.m.rad^{-1}$$

3 - طبيعة حركة النواس الجديد :

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على النواس الجديد :

جهد القوى المطبقة على النواس الجديد :

$\vec{P}$  وزن القرص ،  $\vec{R}$  تأثير السلك على القرص ، مزدوجة اللي المطبقة من طرف السلك (1) ومزدوجة اللي المطبقة من طرف السلك (2) .

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 0 \text{ وبمما أن } \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_{C_1} + \mathcal{M}_{C_2} = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0 \text{ فإن } \mathcal{M}_{C_1} + \mathcal{M}_{C_2} = J_\Delta \ddot{\theta}$$

بحيث أن  $\mathcal{M}_{C_1} = -C_1\theta$  و  $\mathcal{M}_{C_2} = -C_2\theta$  .

حسب المعطيات لدينا أن  $C_1$  تتناسب عكسيا مع طول السلك ، أي أن  $C_1 = \frac{K}{L-z}$  و  $C_2 = \frac{K}{z}$  أي أن

ثابتة اللي للسلك الذي طوله  $L$  كذلك تتناسب عكسيا مع الطول :  $C = \frac{K}{L}$

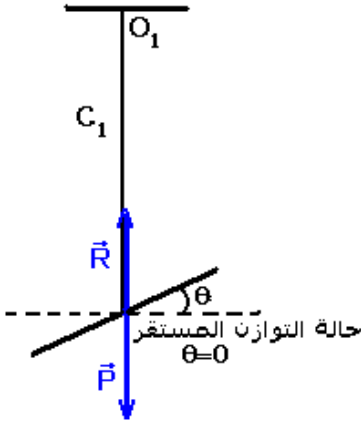
$$-C.L\left(\frac{1}{L-z} + \frac{1}{z}\right)\theta = J_\Delta \ddot{\theta} \text{ نعوض } C_1 \text{ و } C_2 \text{ في المعادلة } -C_1\theta - C_2\theta = J_\Delta \ddot{\theta} \Rightarrow -(C_1 + C_2)\theta = J_\Delta \ddot{\theta}$$

لدينا كذلك :  $K = C.L$  أي

$$-C.L\left(\frac{1}{L-z} + \frac{1}{z}\right)\theta = J_\Delta \ddot{\theta} \Rightarrow -\frac{L^2}{z(L-z)}C = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{L^2.C}{z(L-z).J_\Delta}\theta = 0$$

ب - تعبير الدور  $T'_0$  :





$$T'_0 = 2\pi \sqrt{\frac{z(L-z) \cdot J_\Delta}{L^2 \cdot C}} = \frac{T_0}{L} \sqrt{z(L-z)}$$

حساب  $T'_0$  في حالة  $z = \frac{L}{3}$

$$T'_0 = \frac{T_0}{L} \sqrt{\frac{L}{3} \left( \frac{2L}{3} \right)} = \frac{T_0}{3} \sqrt{2} = 0,43s$$

ج - لنبين أن  $T'_0$  تأخذ قيمة قصوية بالنسبة ل  $z = z_{\max}$   
نحسب المشتقة الأولى ل  $T'_0$  :

$$z = \frac{L}{2} \text{ وبالتالى فإن } T'_0 \text{ تأخذ قيمة قصوية بالنسبة ل } z = \frac{L}{2} \quad \frac{dT'_0}{dt} = \frac{T_0(L-2z)}{2L\sqrt{z(L-z)}} = 0 \Rightarrow L-2z=0$$

$$T'_{0\max} = \frac{T_0}{2} = 0,46s \text{ في هذه الحالة تكون}$$

### تمرين 6

1 - السرعة الزاوية القصوية للرقاص :

طاقة الوضع للي بالنسبة للنايىء الحلزوني  $E_p = \frac{1}{2} C \theta^2 + Cte$  نختار

كحالة مرجعية الحالة التي يكون فيها النايىء غير مشوه ، عند موضع التوازن  $\theta = 0$  يكون النايىء غير مشوه  $E_p = 0$  أي أن  $Cte = 0$  و

$$E_p = \frac{1}{2} C \theta^2$$

نعلم أن الرقاص يأخذ سرعة قصوية عند مروره بموضع توازنه . كما أنه عند حركة النواس هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية أي :  $E_m(0) = E_m(\text{equilibre})$  بحيث أن  $E_m(0) = E_p(0) + E_c(0)$

الميكانيكية عند انطلاق الرقاص بدون سرعة بدئية  $E_c(0) = 0$  و  $E_p(0) = \frac{1}{2} C \theta_m^2$  يعني أن

$$(1) E_m = \frac{1}{2} C \theta_m^2$$

عند مروره من موضع توازنه  $E_p = 0$  و  $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}_{\max}^2$  يعني أن  $E_m = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}_{\max}^2$  (2)

$$\frac{1}{2} C \theta_m^2 = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}_{\max}^2 \Rightarrow \dot{\theta}_{\max} = \theta_m \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}} \text{ من العلاقتين (1) و (2) نستنتج}$$

تطبيق عددي :  $\dot{\theta}_{\max} = 1,66 \text{ rad / s}$

2 - حساب طاقة الوضع والطاقة الحركية للنواس

نطبق انحفاظ الطاقة الميكانيكية بين موضعين مثلا عند مروره من موضع التوازن وموضع في اللحظة t

$$\frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}_{max}^2 = \frac{1}{2} C \theta^2 + E_C(t) \Rightarrow E_C(t) = \frac{1}{2} C \theta_m^2 - \frac{C \theta_m^2}{8}$$

$$E_C(t) = \frac{3C \theta_m^2}{8}$$

$$E_p = \frac{1}{2} C \theta^2 \Rightarrow E_p = \frac{C \theta_m^2}{8} : \text{حساب طاقة الوضع}$$

$$E_p = 0,014.10^{-4} J \text{ و } E_C = 0,042.10^{-4} J : \text{تطبيق عددي}$$

## تمرين 7

### 1 - أ. نطبق العلاقة الأساسية على الجسم A : $\sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_i) = J_{\Delta} \ddot{\theta}$

جهد القوى المطبقة على الجسم A :

$\vec{P}$  وزن الجسم A

$\vec{T}$  توتر القضيب

$\vec{R}$  تأثير المحور على القضيب .

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{T}) = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

القوة  $\vec{T}$  والقوة  $\vec{R}$  يتقاطعا مع المحور  $\Delta$  فإن عزمهما

منعدم . أي أن  $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = J_{\Delta} \ddot{\theta}$

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = -mgd \text{ بحيث أن } d = l \sin \theta \text{ إذن}$$

$$-mg \ell \sin \theta = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

ونستنتج المعادلة التفاضلية لحركة الجسم A

$$\ddot{\theta} + \frac{mg \ell}{J_{\Delta}} \sin \theta = 0 \text{ في حالة التذبذبات ذات الوسع}$$

صغير في هذه الحالة الدور الخاص لا يتعلق بوسع

التذبذبات :  $\sin \theta \approx \theta$

وتصبح المعادلة التفاضلية على الشكل التالي :

$$\ddot{\theta} + \frac{mg \ell}{m \ell^2} \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$$

يتبين من المعادلة التفاضلية أن حركة A حركة دائرية

جيبية .

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} : \text{لهذا النواس} \text{ حساب الدور } T : T_0 = 0,4\pi s = 1,26s$$

2 - أ البرهان على أن الطاقة الحركية للمجموعة تساوي الطاقة الحركية للقضيب :

$$E_C = E_C(\text{tige}) + E_C(A) + E_C(\text{terre})$$

$$E_C = \frac{1}{2} J'_{\Delta} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + 0$$

نعلم أن كتلة القضيب مهملة بالنسبة لكتلة الجسم إذن فعزم قصوره منعدم في هذه الحالة لأن كتلة

$$E_C = E_C(A) : \text{المجموعة مركزة في الجسم A إذن الطاقة الحركية للمجموعة}$$

ب - تعبير الطاقة الحركية للمجموعة :  $E_C = \frac{1}{2} J_A \dot{\theta}^2 \Rightarrow E_C = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$

**ج - طاقة الوضع الثقالية للمجموعة :**

حسب تعريف طاقة الوضع الثقالية :  $E_p = mgz + cte$  نختار Oz موجه نحو الأعلى أي أن

$$z = 0 \Rightarrow E_p = 0 \Rightarrow cte = 0$$

$E_p = mg\ell(1 - \cos \theta)$  في حالة التذبذبات ذات الوسع صغير فإن  $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$  وفي هذه الحالة

تكون طاقة الوضع على الشكل التالي :

$$E_p = mg\ell \frac{\theta^2}{2}$$

د - الطاقة الميكانيكية للمجموعة :

$$E_m = E_C + E_p$$

بما أننا بصدد حركة تذبذبية جيبية فإن معادلتها الزمنية تكتب على الشكل التالي

$$\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{2\pi}{T_0} \theta_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$$

نعوض في المعادلة للطاقة الميكانيكية :

$$E_m = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mgl\theta^2$$

$$= \frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \theta_m^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right) + \frac{1}{2} mgl\theta_m^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$$

حسب المعادلة التفاضلية عندنا  $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$

$$E_m = \frac{1}{2} ml^2 \frac{g}{l} \theta_m^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right) + \frac{1}{2} mgl\theta_m^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$$

$$= \frac{1}{2} ml\theta_m^2 \left( \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right) \right)$$

$$E_m = \frac{1}{2} ml\theta_m^2$$

نستنتج أن هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية نظرا لأن  $E_m = Cte$

3 - 1 - نطبق مبرهنة الطاقة الحركية بين الوضع المستقر والوضع التي تكون فيه الزاوية قصوى  $\alpha_m$

$$-\frac{1}{2}mv_A^2 = -mgl(1 - \cos \alpha_m)$$

$$mv_A^2 = 2mgl - 2mgl \cos \alpha_m$$

$$\cos \alpha_m = 1 - \frac{v_A^2}{2gl}$$

$$\alpha_m = \frac{\pi}{3} \text{ تطبيق عددي نجد}$$

أ - السرعة الانوية التي يجب إعطاؤها للجسم A لكي يصل القضيب إلى وضع توازنه غير المستقر :

$$v'_A = 2\sqrt{gl} \text{ يعني أن } \cos \alpha_m = -1 \text{ أي أن } \alpha_m = \pi$$

$$v'_A = 4m / s \text{ تطبيق عددي}$$

ب - حركة القضيب ستكون في هذه الحالة حركة دورانية حول المحور  $\Delta$  أي مسار الكرة مسار دائري مركزه النقطة التي يمر منها المحور  $\Delta$  .