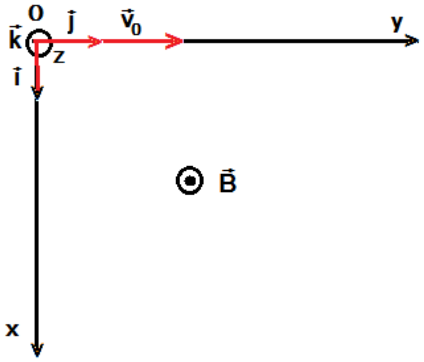
تصحيح التمرين 4



1 ـ المعادلة التفاضلية التي تحققها $y(t)$:

دراسة حركة في المعلم $\mathscr{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ مرتبط بمرجع أرضي والذي نعتبره غاليليا

تخضع الدقيقة إلى القوى التالية :

وزن الدقيقة والطي نعتبر شدته مهملة أمام شدة القوة المغنطيسية

القوة المغنطيسية $\vec{F}$

حسب القانون الثاني لنيوتن : $\vec{F}=m\vec{a}$ بحيث أن $\vec{F}=q\vec{v}\wedge\vec{B}$ باعتبار أن

$q\vec{v}=q\left(v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}\right)$ و $\vec{B}=B\vec{k}$ و بالتالي وحسب الجداء المتجهي فإن

$\vec{F}=qBv_y\vec{i}-qBv_x\vec{j}+0\vec{k}$ ومنه فإن المعادلات التفاضلية للحركة الدقيقة :

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{q}{m}B\dfrac{dy}{dt} & (1)\\[2mm] \dfrac{d^2y}{dt^2}=-\dfrac{q}{m}B\dfrac{dx}{dt} & (2)\\[2mm] \dfrac{d^2z}{dt^2}=0\end{cases}$$

من المعادلة (1) وبالتكامل : $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{q}{m}By+C_1$ ، عند اللحظة $t=0$ $v_x=0$ وبالتالي فإن $C_1=0$

ومنه فإن $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{q}{m}By$ وحسب المعادلة (2) لدينا y $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\left(\dfrac{q}{m}B\right)^2$ أي أن $\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2}+\left(\dfrac{q}{m}B\right)^2y=0}$

2 ـ حل المعادلة التفاضلية :

حل المعادلة التفاضلية يكتب على الشكل التالي : $y(t)=Y_m\cos(\omega t+\varphi)$

الحل يحقق المعادلة التفاضلية : $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\omega^2Y_m\cos(\omega t+\varphi)$ أي أن $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\omega^2y(t)$ ومنه فإن $\omega^2=\left(\dfrac{qB}{m}\right)^2$ أي أن $\boxed{\omega=\dfrac{qB}{m}}$

تحديد Y_m و φ :

عند اللحظة $t=0$ لدينا $\vec{v}=v_0\vec{j}$ و $y_0=0$ ومنه فإن $Y_m\cos\varphi=0$ و $-Y_m\omega\sin\varphi=v_0$ أي أن $\varphi=\pi/2$ أو $\varphi=-\pi/2$

وبما أن $v_0>0$ و $\omega>0$ و $Y_m>0$ فإن $\sin\varphi<0$ أي أن $\boxed{\varphi=-\pi/2}$ و $\boxed{Y_m=v_0/\omega}$

أي أن $\boxed{y(t)=\dfrac{v_0}{\omega}\cos\left(\omega t-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)}$

3 ـ تعبير $x(t)$:

لدينا حسب السؤال الأول أن $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{q}{m}By=\dfrac{qB}{m}\times\dfrac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$ ومنه بالتكامل : $x=\dfrac{qBv_0}{m\omega^2}\cos(\omega t)+C_2$ وعند $t=0$ فإن

$x=0\Rightarrow C_2=\dfrac{qv_0B}{m\omega^2}=\dfrac{v_0}{\omega}$ ومنه فإن $\boxed{x(t)=\dfrac{v_0}{\omega}\left(1-\cos(\omega t)\right)}$

4 ـ تحديد $z(t)$: لدينا $a_z=0$ أي أن $v_z=C_3=0$ ومنه فإن $z=C_4=0$ أي أن $z(t)=0$ ، حركة الدقيقة في المجال المغنطيسي $\vec{B}$ مستوية في المستوى Oxy

معادلة المسار :

$$\begin{cases}X=\left(x-\dfrac{v_0}{\omega}\right)=-\dfrac{v_0}{\omega}\cos(\omega t)\\[2mm] Y=y=\dfrac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)\\[2mm] Z=z=0\end{cases}$$

أي أن $\boxed{X^2+Y^2=\left(\dfrac{v_0}{\omega}\right)^2}$ أي أن مسار الدقيقة عبارة عن دائرة شعاعها $\boxed{R=\dfrac{v_0}{\omega}}$ و مركزها $\boxed{O\left(\dfrac{v_0}{\omega},0\right)}$

ومتجهة السرعة : $\begin{cases}\dot{x}=v_0\sin\omega t\\ \dot{y}=v_0\cos\omega t\\ \dot{z}=0\end{cases}$ ومتجهة التسارع هي : $\vec{a}\begin{cases}\ddot{x}=v_0\omega\cos\omega t\\ \ddot{y}=-v_0\omega\sin\omega t\\ \ddot{z}=0\end{cases}$